Université Saint-Joseph
Faculté des sciences

Année univ. 2004-2005
Matière : NUMCL5

Feuille de T.D.3

Ex-1 : Si $||.||$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et si A est une matrice symétrique, alors $\rho(A) = ||A||$.

Ex-2 : Démontrer que pour toutes matrices carrées A et B de dimension $n \times n$, nous avons :

$$\rho(AB) = \rho(BA)$$

Ex-3 : Soit $||.||$ une norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et $||.||$ la norme matricielle subordonnée associée.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et soit λ une valeur propre de A. Montrer que :

$$||A|| \geq |\lambda| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on a

$$\frac{1}{||A^{-1}||} \leq \frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A||$$

Ex-4 : Soient A et $A + \delta A$ deux matrices d'ordre n inversibles et soit $||.||$ une norme matricielle subordonnée. Montrer que

$$\frac{||(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}||}{||(A + \delta A)^{-1}||} \leq Cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}$$

où $Cond(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$.

Ex-5 : Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$. Soient x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$, où $\delta A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\delta b \in \mathbb{C}^n$. On suppose que

$$||\delta A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$$

où $||.||$ est une matricielle induite de la norme vectorielle $||.||$.